順序極小構造上のデファイナブルG集合のデファイナブルG CW 複体構造の存在とその応用(変換群論の手法)

川上, 智博

数理解析研究所講究録
1517 巻 2006 年 115-119

順序極小構造上のデファイナブルG集合のデファイナブルG CW複体構造の存在とその応用

川上　智博

640-8510 和歌山市栄谷 930

和歌山大学教育学部数学教室

kawa@center.wakayama-u.ac.jp

1. 序文

ここでは、実数体の通常の構造 $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, >)$ の順序極小拡張 $\mathcal{M} = (\mathbb{R}, +, \cdot, >, \ldots)$ おいて考察する。このような構造は、[6] により、非可算無限個存在することが知られている。実閉体上でも議論することができるが、ここでは、$\mathcal{M}$ に制限して考える。デファイナブルカテゴリーに関しては、[1], [2] などに性質がまとめられている。ここでは、デファイナブル集合は、すべてパラメータつきで考える。

本稿では、デファイナブル G 集合のデファイナブル G CW 複体構造の存在を示し、その応用として 3 つの定理を述べることを目的とする。詳しくは、[3] をご覧ください。

2. デファイナブル G 集合のデファイナブル G CW 複体構造の存在

$X \subset \mathbb{R}^n, Y \subset \mathbb{R}^m$ をデファイナブル集合とする。連続写像 $f : X \to Y$ が**デファイナブル写像**とは、f のグラフがデファイナブル集合であることである。ここでは、デファイナブル写像は連続と仮定する。

2000 *Mathematics Subject Classification.* 14P10, 57S10, 03C64.
Keywords and Phrases. デファイナブル G 集合, デファイナブル G CW 複体, 順序極小構造, デファイナブル群.

$\mathbb{R}^n$ のデファイナブル部分集合 G が**デファイナブル群**とは、G が群であって、群演算 $G \times G \to G$, $G \to G$ がデファイナブル写像となることである。

デファイナブル群 G から直交群 $O(n)$ への群準同型で、デファイナブル写像となるものを**デファイナブル群準同型**という。このデファイナブル群準同型から導かれた直交作用による G 不変デファイナブル部分集合を**デファイナブル G 集合**という。直交作用によらないデファイナブル G 集合も定義できるが、ここではそれらを扱わない。デファイナブル G 集合のデファイナブル G CW 複体構造の存在を証明するには、直交作用であることが必要である。

デファイナブル G 集合 X, Y 間のデファイナブル写像が**デファイナブル G 写像**とは、G 写像となることである。デファイナブル G 写像 $f : X \to Y$ が**デファイナブル G 同相写像**とは、デファイナブル G 写像 $h : Y \to X$ が存在して、$f \circ h = id$ かつ $h \circ f = id$ となることである。

定義 2.1 (デファイナブル G CW 複体). 群 G をコンパクトデファイナブル群とする。

(1) **デファイナブル G CW 複体**とは、有限 G CW 複体 $(X, \{c_i | i \in I\})$ で次の条件を満たすものである。

(a) $|X|$ はデファイナブル G 集合である。

(b) 特性写像 $f_{c_i} : G/H_{c_i} \times \Delta \to \overline{c_i}$ はデファイナブル G 写像で、$f_{c_i}|G/H_{c_i} \times int(\Delta) : G/H_{c_i} \times int(\Delta) \to c_i$ はデファイナブル G 同相写像である。ただし、$\overline{c_i}$ は c_i の X における閉包を表し、Δ は単体を表し、$int(\Delta)$ はその内部を表す。

(2) X, Y をデファイナブル G CW 複体とする。G 写像 $f : X \to Y$ が**デファイナブル胞体 G 写像**とは、$f : |X| \to |Y|$ がデファイナブルで、各 n に対して、X の n 切片を Y の n 切片の中に写すものである。

注意 2.2. *(1)* デファイナブル G CW 複体の任意の G CW 部分複体は、デファイナブル G CW 複体となる。

(2) デファイナブル群の任意のデファイナブル群は閉部分群となる ([5])。この逆は不成立である。

定理 2.3 ([3]). G をコンパクトデファイナブル群、X をデファイナブル G 集合、Y を X の閉デファイナブル G 部分集合とする。このとき、G 表現 Ω の中のデファイナブル G CW 複体 Z、Z の G CW 部分複体 W とデファイナブル G 写像 $f : X \to Z$ が存在して、次の条件を満たす。

(1) $Z_1 := f(X)$ $(W_1 := f(Y))$ は、Z (W) から開 G 胞体を除いて得られた空間となり、$f:(X,Y) \to (Z_1, W_1)$ はデファイナブル G 同相写像である。

(2) 射影 $\pi : Z \to Z/G$ はデファイナブル胞体写像である。

(3) 任意の開 G 胞体に対して、$\pi|\bar{c} : \bar{c} \to \pi(\bar{c})$ はデファイナブル切断 $s:\pi(\bar{c}) \to \bar{c}$ をもつ。ただし、$\bar{c}$ は Z における c の閉包を表すとする。

さらに、X がコンパクトならば、$Z = f(X), W = f(Y)$ ととれる。

3. 定理 2.3 の 3 つの応用例

X, Y をデファイナブル G 集合とし、$f, h : X \to Y$ をデファイナブル G 写像とする。f と h が**デファイナブル G ホモトピック**とは、デファイナブル G 写像 $H : X \times [0,1] \to Y$ が存在して、各 $x \in X$ に対して、$H(x,0) = f(x)$ かつ $H(x,1) = h(x)$ が成り立つことである。ただし、$[0,1]$ 上の G 作用は自明とする。

$[X,Y]^{g}_{def}$ $([X,Y]^{G}_{top})$ でデファイナブル G 写像（連続 G 写像）のデファイナブル G ホモトピー類（G ホモトピー類）全体の集合を表すとする。デファイナブル G 写像（連続 G 写像）$f:X \to Y$ に対して、$[f]^{G}_{def}$ $([f]^{G}_{top})$ で f のデファイナブル G ホモトピー類（G ホモトピー類）を表すとする。このとき、標準的な写像 $\mu : [X,Y]^{G}_{def} \to [X,Y]^{G}_{top}, \mu([f]^{G}_{def}) = [f]^{G}_{top}$ を得る。

定理 3.1 ([3]). G をコンパクトデファイナブル群、X, Y をデファイナブル G 集合とする。このとき、$\mu : [X,Y]^{G}_{def} \to [X,Y]^{G}_{top}$ は全単射である。

系 3.2. G をコンパクトデファイナブル群、X, Y をデファイナブル G 集合とするとき、任意の連続 G 写像 $f:X \to Y$ は、デファイナブル G 写像と G ホモトピックである。

この系は、f がデファイナブル G 写像で近似できるとはいっていない。例えば、$G=1$ のとき、$f:(0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \sin\frac{1}{x}$ とすると、f はデファイナブル写像で近似できない。$\forall \epsilon > 0\ \exists h : (0,1] \to \mathbb{R}$:デファイナブル写像 $|f(x) - h(x)| < \epsilon$ とできない。もしできたとすると、h は無限回振動しなければならない。このような関数はデファイナブルでない。

次の応用例を述べる前に、デファイナブル G ベクトル束を定義しよう ([3])。

定義 3.3. $\eta = (E, p, X)$ をデファイナブル集合 X 上の k 次元ベクトル束とする。

(1) 有限個の局所自明化写像の族 $(U_i, \phi_i : U_i \times \mathbb{R}^k \to p^{-1}(U_i))_i$ が**デファイナブルアトラス**とは、$(U_i)_i$ が X の開被覆で、各 U_i がデファイナブルで、任意の (i,j) に対して、

$\phi_j \circ \phi_i^{-1}|(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^k : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^k \to (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^k$ がデファイナブルであることである。η とデファイナブルアトラスの組を**デファイナブルベクトル束**という。

(2) $(\eta, (U_i, \phi_i)_i), (\eta', (U'_j, \phi'_j)_j)$ をそれぞれ X 上の k 次元、l 次元デファイナブルベクトル束とする。ベクトル束写像 $\psi : \eta \to \eta'$ が**デファイナブルベクトル束写像**とは、任意の (i, j) に対して、$(\phi'_j)^{-1} \circ \psi \circ \phi_i|(U_i \cap U'_j) \times \mathbb{R}^k : (U_i \cap U'_j) \times \mathbb{R}^k \to (U_i \cap U'_j) \times \mathbb{R}^l$ がデファイナブルであることである。デファイナブルベクトル束写像 $h : \eta \to \eta'$ が**デファイナブルベクトル束同型写像**とは、デファイナブルベクトル束写像 $h' : \eta' \to \eta$ が存在して、$h \circ h' = id$ かつ $h' \circ h = id$ となることである。

定義 3.4. G をデファイナブル群とする。デファイナブルベクトル束 $\eta = (E, p, X)$ が**デファイナブル G ベクトル束**とは、次の 3 つの条件を満たすことである。

(a) E がデファイナブル G 空間であり、X がデファイナブル G 集合である。

(b) 射影 $p : E \to X$ がデファイナブル G 写像である。

(c) 各 $x \in X$、$g \in G$ に対して、$p^{-1}(x) \to p^{-1}(gx), y \mapsto gy$ が線形同型写像である。

定義 3.5 (普遍 G ベクトル束)**.** G をコンパクトデファイナブル群、Ω を n 次元 G 表現、$B : G \to O(n)$ を Ω の表現写像とする。このとき、行列空間 $M(\Omega)$ は、$(g, A) \mapsto B(g)AB(g)^{-1}$ により、G 表現となる。各自然数 k に対して、

$$G(\Omega, k) = \{A \in M(\Omega) | A^2 = A, A = A', TrA = k\},$$

$$E(\Omega, k) = \{(A, v) \in G(\Omega, k) \times \Omega | Av = v\},$$

$$u : E(\Omega, k) \to G(\Omega, k), u((A, v)) = A,$$

$$\gamma(\Omega, k) = (E(\Omega, k), u, G(\Omega, k))$$

と定義する。ただし、A' は A の転置行列を表すとする。$\gamma(\Omega, k)$ を**普遍 G ベクトル束**という。

定義 3.6. G をコンパクトデファイナブル群とする。デファイナブル G ベクトル束 η が**強デファイナブル**とは、G 表現 Ω とデファイナブル G 写像 $f : X \to G(\Omega, k)$ が存在して、η と $f^*(\gamma(\Omega, k))$ がデファイナブル G ベクトル束同型となることである。

X をデファイナブル G 集合とする。$Vect^G_{def}(X)$ ($Vect^G_{top}(X)$) でデファイナブル G ベクトル束 (G ベクトル束) のデファイナブル G ベクトル束同型類全体 (G ベクトル束同型類全体) を表すとする。$[\eta]^G_{def}$ ($[\eta]^G_{top}$) で η のデファイナブル G ベクトル束同型類 (G ベクトル束同型類) を表すとする。

定理 3.7 ([3]). Gを有限群、XをデファイナブルG集合とする。

(1) X上の任意のデファイナブルGベクトル束は、強デファイナブルである。

(2) $\kappa : Vect^G_{def}(X) \to Vect^G_{top}(X), \kappa([\eta]^G_{def}) = [\eta]^G_{top}$ は全単射である。

次に定理3.1と定理3.7のデファイナブルC^r版を考える。$1 \leq r \leq \omega$のとき、デファイナブルC^rG多様体、デファイナブルC^rGベクトル束を考えることができる ([4])。

GをコンパクトデファイナブルC^r群、X, YがデファイナブルC^rG多様体のとき、上記と同様に、$\mu' : [X,Y]^G_{def\ C^r} \to [X,Y]^G_{top}$、$\kappa' : Vect^G_{def\ C^r}(X) \to Vect^G_{top}(X)$ を定義することができる。

定理 3.8 ([3]). Gを有限群、X, YをアフィンデファイナブルC^rG多様体とする。

(1) $\mu' : [X,Y]^G_{def\ C^r} \to [X,Y]^G_{top}$ は全単射である。

(2) $\kappa' : Vect^G_{def\ C^r}(X) \to Vect^G_{top}(X)$ は全単射である。

References

[1] L. van den Dries, *Tame topology and o-minimal structures*, Lecture notes series **248**, London Math. Soc. Cambridge Univ. Press (1998).

[2] L. van den Dries and C. Miller, *Geometric categories and o-minimal structures*, Duke Math. J. **84** (1996), 497-540.

[3] T. Kawakami, *Definable G CW complex structures of definable G sets and their applications*, to appear.

[4] T. Kawakami, *Equivariant differential topology in an o-minimal expansion of the field of real numbers*, Topology Appl. **123**, (2002), 323-349.

[5] A. Pillay, *On groups and fields definable in o-minimal structures*, J. Pure Appl. Algebra **53**, (1988), 239-255.

[6] J.P. Rolin, P. Speissegger and A.J. Wilkie, *Quasianalytic Denjoy-Carleman classes and o-minimality*, J. Amer. Math. Soc. **16**, (2003), no. 4, 751–777.